Jednostki

Długość:

1 in (cal) = 2,54 cm
1 yd (yard) = 91,44 cm
1 mila amer. = 1853,25 m
1 mila geog. = 7420 m
1 mila morska = 1852 m

1 km = 1000 m
1 m = 10 dm
1 dm = 10 cm
1 cm = 10 mm

Powierzchnia:

1 ha (hektar) = 10 000 m^2
1 a (ar) = 100 m^2
1 ha = 100 a

1 km^2 = 1 000 000 m^2
1 m^2 = 100 dm^2
1 dm^2 = 100 cm^2
1 cm^2 = 100 mm^2

Objętość:

1 ml (mililitr) = 1 cm^3
1 l (litr) = 1 dm^3
1 hl (hektolitr) = 100 l

1 m^3 = 1000 dm^3
1 dm^3 = 1000 cm^3
1 cm^3 = 1000 mm^3

Masa:

1 q (kwintal) = 100 kg
1 oz (uncja) = 28,3 g
1 lb (funt) = 453,6 g

1 t = 1000 kg
1 kg = 100 dag
1 dag = 10 g
1 g = 1000 mg

Czas:

w roku przestępnym jest 366 dni

1 rok = 365 dni
1 dzień = 24 h
1 h = 60 min
1 min = 60 s

opracował: ***mgr Robert Ślusarski***

SZKOLNE WZORY MATEMATYCZNE

Ruda Śląska, 2004

Od autora:

Szkolne wzory matematyczne powstały z potrzeby dostarczenia uczniom szkoły średniej czytelnych oraz tanich tablic matematycznych, w których zawarte byłyby niezbędne terminy i wzory. Mała objętość oraz duża, wyraźna czcionka sprzyja szybkiemu wyszukiwaniu informacji. Tablice sprawdzają się jako uzupełnienie podręcznika i pomoc dla uczniów na sprawdzianach.

R. Ślusarski

Kopiowanie w części lub w całości

bez adnotacji o autorze

zabronione.

Zespół Szkół Ponadgimnazjalnych nr 1 w Rudzie Śląskiej opracował: ***mgr Robert Ślusarki***

Prawdopodobieństwo całkowite

$$P(A) = P(A \mid B_1) \cdot P(B_1) + P(A \mid B_2) \cdot P(B_2)$$

założenia: $B_1 \cup B_2 = \Omega$, $B_1 \cap B_2 = \varnothing$, $P(B_1) > 0$, $P(B_2) > 0$

Procent prosty i składany

Oznaczenia:

K_0 – kapitał początkowy

n – liczba okresów kapitalizacji *(miesięcy, kwartałów, lat)*

$p\,\%$ – stopa procentowa *(jednakowa w każdym okresie)*

K_n – kapitał po n okresach kapitalizacji

O_n – łączne odsetki za n okresów kapitalizacji

Oprocentowanie proste polega na tym, że odsetki od kapitału za dany okres nie są doliczane do kapitału i nie biorą udziału w oprocentowaniu w okresie następnym.

$$K_n = K_0\left(1 + \frac{np}{100}\right) \qquad O_n = \frac{np}{100} K_0$$

Oprocentowanie składane polega na tym, że odsetki od kapitału za dany okres są doliczone do kapitału i biorą udział w oprocentowaniu w okresie następnym.

$$K_n = K_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \qquad O_n = \left[\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - 1\right] K_0$$

Rachunek prawdopodobieństwa

Oznaczenia:

Ω – *skończony zbiór zdarzeń elementarnych (zdarz. pewne)*
A – *zdarzenie – podzbiór zbioru* Ω
A' – *zdarzenie przeciwne do* A ($A' = \Omega \setminus A$)
$\varnothing$ – *zdarzenie niemożliwe*
$P(A)$ – *prawdopodobieństwo zdarzenia* A

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Jeśli wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, to prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe ilorazowi liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A i liczby wszystkich zdarzeń elementarnych.

$$P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}$$

Własności prawdopodobieństwa

$$P(A) \le 1 \qquad P(A) \ge 0 \qquad P(\varnothing) = 0 \qquad P(\Omega) = 1$$
$$P(A') = P(\Omega \setminus A) = 1 - P(A)$$
$$P(A) = 1 - P(A')$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
gdy $A \cap B = \varnothing$, to $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

Zdarzenia A i B są niezależne, gdy: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Prawdopodobieństwo warunkowe

Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A, pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad P(B) > 0$$

Wybrane terminy

Termin	Definicja	Przykład
Liczby naturalne N	Liczba 0 i liczby otrzymane przez dodanie do niej jedności	0, 1, 2, 3, ...
Liczby całkowite C	Liczby naturalne oraz liczby do nich przeciwne	..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...
Liczby wymierne W	Liczby dające przedstawić się w postaci ułamka $\frac{n}{m}$ ($n \in C, m \in N^+$)	1, -3, $\frac{3}{5}$, $-\frac{10}{3}$, 0
Liczby niewymierne IW	Liczby rzeczywiste nie będące liczbami wymiernymi	$\sqrt{2}, \sqrt[3]{5}, \pi$
Liczby rzeczywiste R	Liczby wymierne oraz liczby niewymierne	
Liczby pierwsze	Liczby naturalne $n > 1$, które mają tylko dwa dzielniki naturalne: 1 i n.	2, 3, 5, 7, 11, 13, ...
Liczby względnie pierwsze	Dwie liczby naturalne, których największym wspólnym dzielnikiem jest 1.	2 i 3, 4 i 9, 9 i 14
Liczby doskonałe	Liczby, które są równe sumie swych dzielników naturalnych (różnych od samych siebie).	6 = 3 + 2 + 1 28 = 14 + 7 + 4 +2 + 1
Największy wspólny dzielnik	Największa liczba naturalna, przez którą dzieli się każda z danych (dwóch lub więcej) liczb naturalnych.	nwd(4,6) = 2 nwd(10,20) = 10 nwd(24,30,60) = 6
Najmniejsza wspólna wielokrotność	Najmniejsza liczba naturalna, która dzieli się przez każdą z danych (dwóch lub więcej) liczb naturalnych.	nww(12,30) = 60 nww(5,10,11) = 55
Przedział otwarty	$(a;b) = \{x \in R : a < x < b\}$	$(-2;4)$
Przedział domknięty	$\langle a;b \rangle = \{x \in R : a \le x \le b\}$	$\langle -2;4 \rangle$
Przedział prawostronnie domknięty	$(a;b\rangle = \{x \in R : a < x \le b\}$	$(-2;4\rangle$
Przedział lewostronnie domknięty	$\langle a;b) = \{x \in R : a \le x < b\}$	$\langle -2;4)$

Logika

Podstawowe zdania złożone

Zdanie	Czytamy	Nazwa zdania
$\sim p$	nieprawda, że p	zaprzeczenie (negacja) p
$p \vee q$	p lub q	alternatywa zdań p, q
$p \wedge q$	p i q	koniunkcja zdań p, q
$p \Rightarrow q$	jeżeli p, to q	implikacja zdań p, q
$p \Leftrightarrow q$	p wtedy i tylko wtedy, gdy q	równoważność zdań p, q

Wartości logiczne podstawowych zdań złożonych

Alternatywa		
p	q	$p \vee q$
1	1	**1**
1	0	**1**
0	1	**1**
0	0	**0**

Koniunkcja		
p	q	$p \wedge q$
1	1	**1**
1	0	**0**
0	1	**0**
0	0	**0**

Implikacja		
p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	**1**
1	0	**0**
0	1	**1**
0	0	**1**

Równoważność		
p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	**1**
1	0	**0**
0	1	**0**
0	0	**1**

Prawa rachunku zdań

$p \vee \sim p$ – wyłączonego środka

$\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$ – podwójnego zaprzeczenia

$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$ – zaprzeczenia alternatywy

$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$ – zaprzeczenia koniunkcji

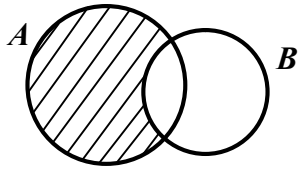
$\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$ – zaprzeczenia implikacji

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ – kontrapozycji

$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ – przechodniości implikacji

Różnica zbiorów - wszystkie te elementy, które należą do A i nie należą do B.

$A \setminus B$



Kombinatoryka

Permutacja – tworzenie ciągów n-elementowych ze zbioru n elementów *(istotna kolejność)*.

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \qquad \text{– silnia}$$

Wariacja z powtórzeniami – tworzenie ciągów k-elementowych ze zbioru n elementów *(istotna kolejność i te same elementy **mogą** się powtarzać)*.

$$\overline{V}_n^k = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k \text{ razy}} = n^k$$

Wariacja bez powtórzeń - tworzenie ciągów k-elementowych ze zbioru n elementów *(istotna kolejność i te same elementy **nie mogą** się powtarzać)*.

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

Kombinacja – tworzenie podzbiorów k-elementowych ze zbioru n elementów (kolejność elementów nie jest istotna).

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \qquad \text{– symbol Newtona}$$

Wektor przeciwny:

$$\vec{u} = -\vec{v} = -[v_x, v_y] = [-v_x, -v_y]$$

Dodawanie i odejmowanie wektorów:

$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{w} = [v_x, v_y] + [w_x, w_y] = [v_x + w_x, v_y + w_y]$$

$$\vec{u} = \vec{v} - \vec{w} = [v_x, v_y] - [w_x, w_y] = [v_x - w_x, v_y - w_y]$$

Iloczyn skalarny wektorów:

$$a = \vec{v} \circ \vec{w} = [v_x, v_y] \circ [w_x, w_y] = v_x \cdot w_x + v_y \cdot w_y$$

$$\vec{v} \circ \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\vec{v}, \vec{w})$$

Wektory $\vec{v} = [v_x, v_y]$ i $\vec{w} = [w_x, w_y]$ są :

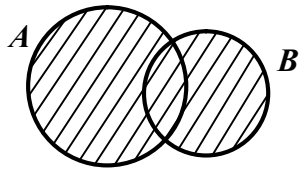
równoległe, gdy $v_x w_y - v_y w_x = 0$

prostopadłe, gdy $v_x w_x + v_y w_y = 0$

Działania na zbiorach

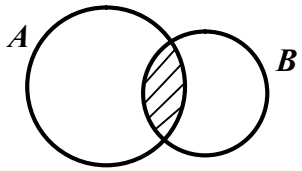
Suma zbiorów – wszystkie te elementy, które należą do ***A*** lub do ***B***.

$A \cup B$



Iloczyn zbiorów - wszystkie te elementy, które należą i do ***A***, i do ***B***.

$A \cap B$



Cechy podzielności liczb całkowitych

Dzielnik	Dana liczba dzieli się przez *n*
2	... jeśli ostatnią cyfrą jest 0, 2, 4, 6, 8 (liczba jest parzysta)
3	... jeśli suma cyfr liczby dzieli się przez 3
4	... jeśli dwie ostatnie cyfry tworzą liczbę (dwucyfrową) dzielącą się przez 4
5	... jeśli ostatnią cyfrą jest 0 lub 5
6	... jeśli liczba dzieli się przez 2 i przez 3
8	... jeśli trzy ostatnie cyfry tworzą liczbę (trzycyfrową) podzielną przez 8
9	... jeśli suma cyfr liczby dzieli się przez 9
10	... jeśli ostatnią cyfrą jest 0

Działania na ułamkach zwykłych

Dodając (odejmując) ułamki o **równych** mianownikach dodajemy (odejmujemy) ich liczniki, a mianownik pozostawiamy bez zmiany.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \qquad \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$$

Dodając (odejmując) ułamki o **różnych** mianownikach należ je sprowadzić do wspólnego mianownika i postępować jak wyżej.

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \pm \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{a \cdot d \pm b \cdot c}{b \cdot d}$$

Mnożąc ułamki mnożymy ich liczniki oraz mianowniki.
Dzieląc dwa ułamki mnożymy pierwszy przez odwrotność drugiego.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \qquad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Własności proporcji

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad a \cdot d = b \cdot c \qquad \frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c}$$

Działania arytmetyczne

$a+b=b+a$ - *przemienność dodawania*
$a\cdot b=b\cdot a$ - *przemienność mnożenia*
$(a+b)+c=a+(b+c)$ - *łączność dodawania*
$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$ - *łączność mnożenia*
$a\cdot(b\pm c)=a\cdot b\pm a\cdot c$ - *rozdzielność mnożenia względem dodawania (odejmowania)*

Wzory skróconego mnożenia

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

Wartość bezwzględna

$|a|=\begin{cases} a & \text{dla } a\geq 0 \\ -a & \text{dla } a<0 \end{cases}$ $\quad |a|\geq 0$ $\quad$ Jeśli $|a|=0$, to $a=0$

$|-a|=|a|$ $\quad \sqrt{a^2}=|a|$ $\quad |a|^2=a^2$ $\quad |a-b|=|b-a|$

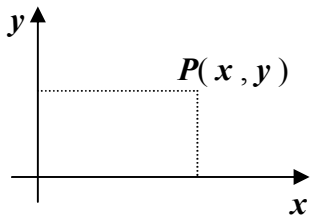
$|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$ $\quad \left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$ $\quad |a+b|\leq|a|+|b|$

Jeśli $a>0$, to:

$|x|=a \Leftrightarrow x=a$ lub $x=-a$
$|x|<a \Leftrightarrow x<a$ i $x>-a$
$|x|\leq a \Leftrightarrow x\leq a$ i $x\geq -a$
$|x|>a \Leftrightarrow x>a$ lub $x<-a$
$|x|\geq a \Leftrightarrow x\geq a$ lub $x\leq -a$

Układ współrzędnych

x – odcięta punktu (oś odciętych)
y – rzędna punktu (oś rzędnych)



Wzór na <u>odległość</u> między dwoma punktami $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$:

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Współrzędne <u>środka</u> odcinka AB: $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$

Wektory

Współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$, gdy $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$:

$$\overrightarrow{AB}=[x_2-x_1,y_2-y_1]=[v_x,v_y]$$

Dwa wektory $\vec{v}=[v_x,v_y]$ i $\vec{w}=[w_x,w_y]$ są równe, gdy:

$$v_x=w_x \quad \text{i} \quad v_y=w_y$$

Długość wektora:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{v_x^2+v_y^2}$$

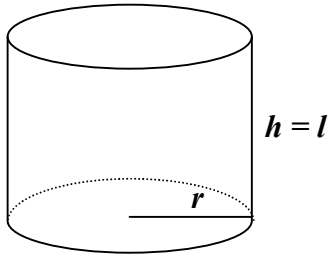
Mnożenie wektora przez liczbę:

$$\vec{u}=a\cdot\vec{v}=a\cdot[v_x,v_y]=[a\cdot v_x,a\cdot v_y]$$

Bryły obrotowe

Walec:

$$V = \pi r^2 h$$
$$P_c = 2P_p + P_b$$
$$P_p = \pi r^2$$
$$P_b = 2\pi rh$$

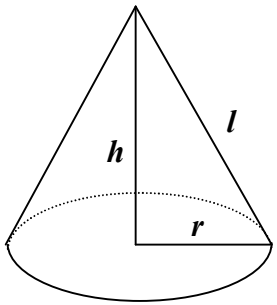


l *– tworząca walca*

Przekrój osiowy walca jest prostokątem o wymiarach ***2r*** na ***h***.

Stożek:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$
$$P_c = P_p + P_b$$
$$P_p = \pi r^2$$
$$P_b = \pi rl$$

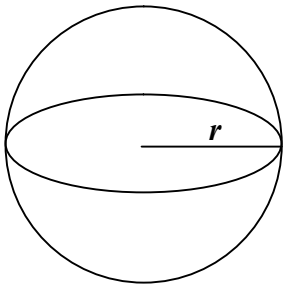


l *– tworząca stożka*

Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równoramiennym o podstawie ***2r*** i wysokości ***h***.

Kula:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$
$$P_c = 4\pi r^2$$



Przekrojem osiowym kuli jest koło *(wielkie)* o promieniu ***r***.

Potęgi i działania na nich

$$a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \quad (n \text{ razy}) \qquad a \in R,\ n \in N_+$$

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0), \qquad 0^n = 0 \quad (n \neq 0), \qquad 1^n = 1$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^n : a^m = a^{n-m} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

Pierwiastkowanie

$$\sqrt[n]{0} = 0 \qquad \sqrt[n]{1} = 1 \qquad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a},\ (a \geq 0) \qquad a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}},\ (a > 0)$$

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Usuwanie niewymierności z mianownika

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{b} \qquad \frac{a}{b + \sqrt{c}} = \frac{a \cdot \left(b - \sqrt{c}\right)}{b^2 - c} \qquad \frac{a}{b - \sqrt{c}} = \frac{a \cdot \left(b + \sqrt{c}\right)}{b^2 - c}$$

$$\frac{a}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} = \frac{a \cdot \left(\sqrt{b} - \sqrt{c}\right)}{b - c} \qquad \frac{a}{\sqrt{b} - \sqrt{c}} = \frac{a \cdot \left(\sqrt{b} + \sqrt{c}\right)}{b - c}$$

Własności funkcji

Definicja: Funkcją f odwzorowującą zbiór X w zbiór Y nazywamy takie przyporządkowanie, które każdemu elementowi x za zbioru X przyporządkowuje jeden element y ze zbioru Y. Ozn. $f: X \to Y$.

Miejsce zerowe funkcji f nazywamy taki argument x, dla którego funkcja f przyjmuje wartość 0, tzn. $f(x) = 0$.

Funkcja jest **rosnąca** w zbiorze A wtedy i tylko wtedy, gdy wraz ze wzrostem argumentów z tego zbioru rosną wartości funkcji f.

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

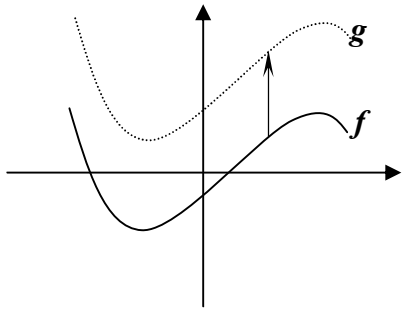
Funkcja jest **malejąca** w zbiorze A wtedy i tylko wtedy, gdy wraz ze wzrostem argumentów z tego zbioru maleją wartości funkcji f.

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Przekształcanie wykresu funkcji

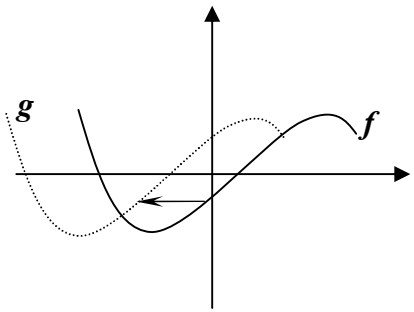
Przesunięcie o wektor $\vec{u} = [0, q]$
(w górę lub w dół)

$$g(x) = f(x) + q$$



Przesunięcie o wektor $\vec{u} = [p, 0]$
(w lewo lub w prawo)

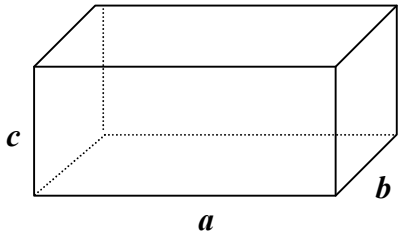
$$g(x) = f(x - p)$$



Prostopadłościan:

$$V = abc$$

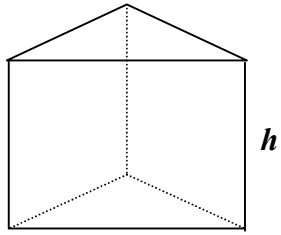
$$P_c = 2(ab + bc + ac)$$



Graniastosłup:

$$V = P_p h$$

$$P_c = 2P_p + P_b$$



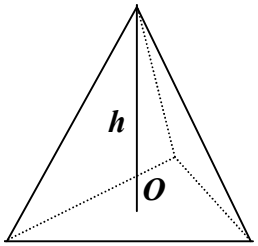
Graniastosłup prosty – ściany boczne są prostokątami (wysokość jest prostopadła do podstaw).

Graniastosłup prawidłowy – prosty i w podstawie wielokąt foremny (trójkąt równoboczny, kwadrat, pięciokąt foremny, ...)

Ostrosłup:

$$V = \frac{1}{3} P_p h$$

$$P_c = P_p + P_b$$

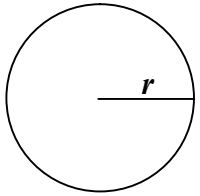


Ostrosłup prawidłowy – ściany boczne są przystającymi trójkątami równoramiennymi i w podstawie jest wielokąt foremny (spodek wysokości O leży w środku okręgu opisanego na podstawie)

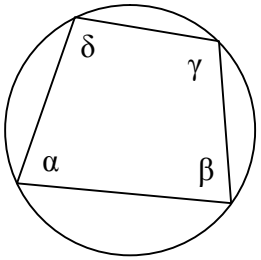
Koło:

$P = \pi r^2$

$l = 2\pi r$ – *obwód koła*

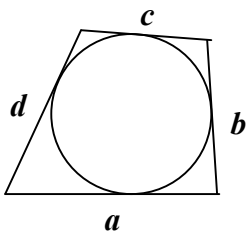


Czworokąt <u>wpisany</u> w koło



$\alpha + \gamma = \beta + \delta$

Czworokąt <u>opisany</u> na kole



$a + c = b + d$

Bryły przestrzenne - wielościany

<u>Oznaczenia</u>:

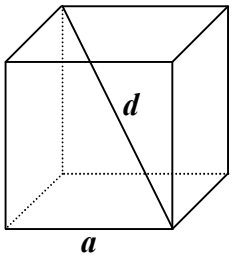
V – *objętość bryły*
P_c – *pole powierzchni całkowitej*
P_p – *pole powierzchni podstawy*
P_b – *pole powierzchni bocznej*

Sześcian:

$V = a^3$

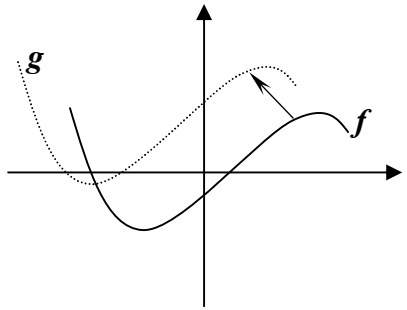
$P_c = 6a^2$

$d = a\sqrt{3}$



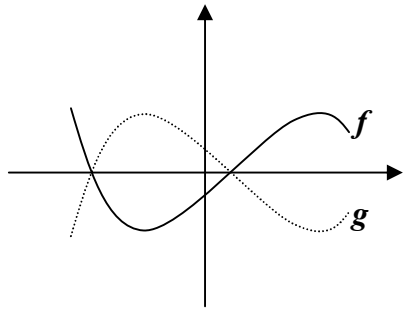
Przesunięcie o wektor $\vec{u} = [p, q]$

$g(x) = f(x - p) + q$



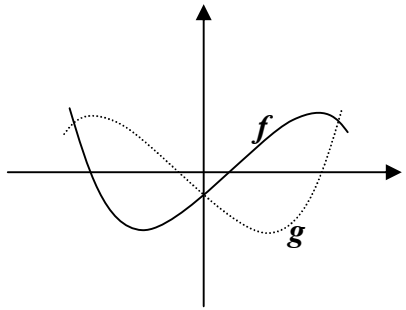
Symetria względem osi *OX*

$g(x) = -f(x)$



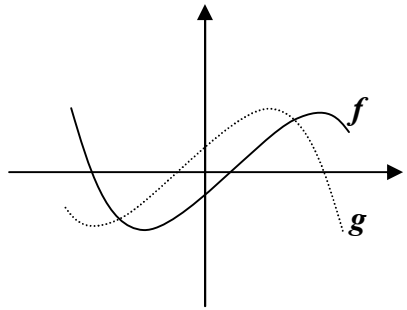
Symetria względem osi *OY*

$g(x) = f(-x)$



Symetria względem punktu $(0,0)$

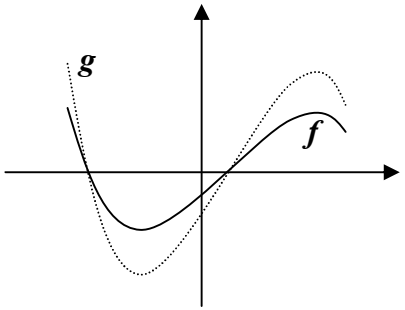
$g(x) = -f(-x)$



Powinowactwo prostokątne
o osi *OX* i skali *s* *(w pionie)*

rozciąganie – $s > 1$
ściskanie – $0 < s < 1$

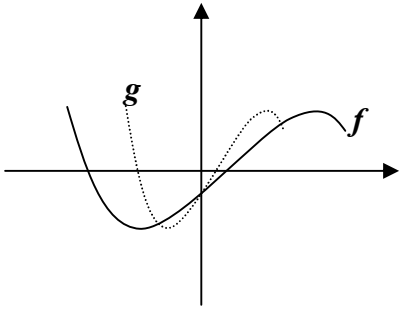
$$g(x) = s \cdot f(x)$$



Powinowactwo prostokątne
o osi *OY* i skali $\frac{1}{s}$ *(w poziomie)*

rozciąganie – $0 < s < 1$
ściskanie – $s > 1$

$$g(x) = f(s \cdot x)$$

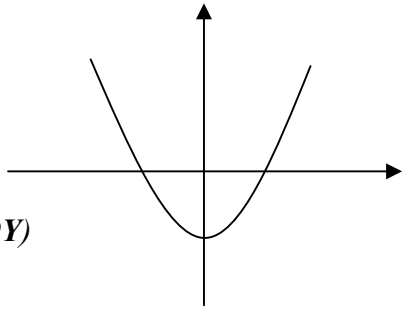


Parzystość i nieparzystość funkcji

Funkcja f **parzysta**, gdy
dla każdego $x \in D$: $-x \in D$ i

$$f(-x) = f(x)$$

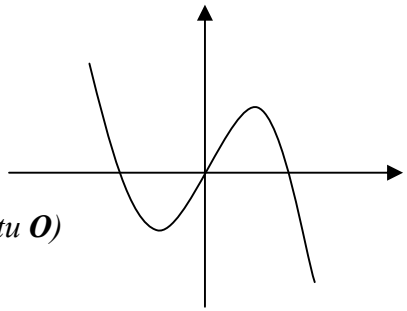
*(wykres symetryczny względem osi **OY**)*



Funkcja f **nieparzysta**, gdy
dla każdego $x \in D$: $-x \in D$ i

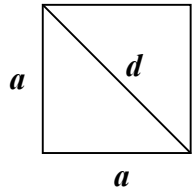
$$f(-x) = -f(x)$$

*(wykres symetryczny względem punktu **O**)*

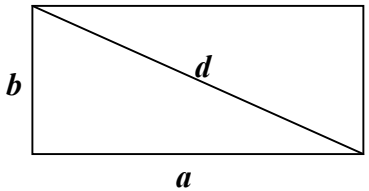


Pola figur płaskich

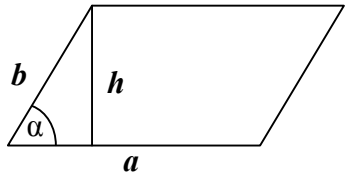
Kwadrat: $P = a^2$ $\quad d = a\sqrt{2}$
$r = \frac{1}{2}a$ $\quad R = \frac{1}{2}d$



Prostokąt: $P = ab$
$d = \sqrt{a^2 + b^2}$
$R = \frac{1}{2}d$

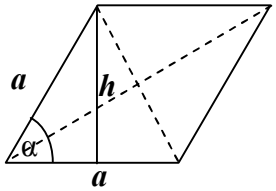


Równoległobok: $P = ah$
$h = b\sin\alpha$
$P = ab\sin\alpha$

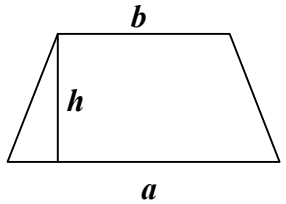


Romb: $P = ah$
$P = \frac{1}{2}d_1 d_2$
$P = a^2 \sin\alpha$

d_1, d_2 – *przekątne rombu* $d_1 \perp d_2$



Trapez: $P = \frac{1}{2}(a + b)h$
$a \parallel b$

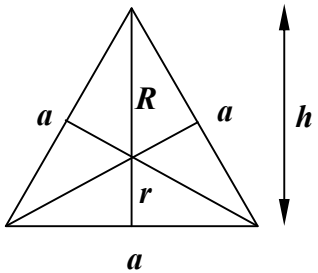


Trójkąt równoboczny

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \qquad P_{\Delta} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$r = \frac{1}{3}h$$

$$R = \frac{2}{3}h$$

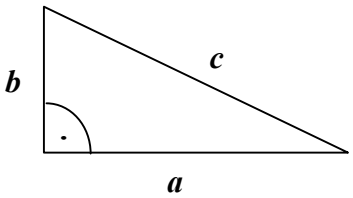


Trójkąt prostokątny

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2}ab$$

$$r = \frac{1}{2}(a+b-c)$$

$$R = \frac{1}{2}c$$



środek okręgu opisanego na trójkącie leży w połowie przeciwprostokątnej

a, ***b*** *– przyprostokątne*
c *– przeciwprostokątna*

Twierdzenie Pitagorasa

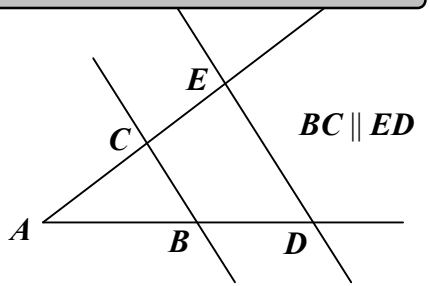
W trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Twierdzenie Talesa

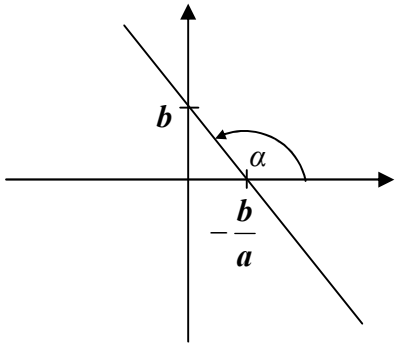
$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CE} = \frac{AD}{AE}$$

$$\frac{DE}{AD} = \frac{BC}{AB}, \quad \frac{DE}{AE} = \frac{BC}{AC}$$



Funkcja liniowa

Postać liniowa (*kierunkowa*): $y = ax + b$



a *– współczynnik kierunkowy*
b *– wyraz wolny*
x *– argument funkcji (zmienna)*
y *– wartość funkcji*

$$a = tg\alpha$$

Równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty (x_1, y_1), (x_2, y_2):

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) \qquad \text{dla } x_1 \neq x_2$$

$x = x_1$ dla $x_1 = x_2$ – *prosta prostopadła do osi* ***OX***

Równanie prostej przechodzącej przez punkt (x_1, y_1) i o współczynniku kierunkowym a:

$$y - y_1 = a \cdot (x - x_1)$$

Warunek **prostopadłości** prostych: $a_1 \cdot a_2 = -1$ czyli $a_2 = \frac{-1}{a_1}$

Warunek **równoległości** prostych: $a_1 = a_2$

Wzór na kąt między dwiema prostymi: $tg\beta = \frac{a_2 - a_1}{1 + a_1 \cdot a_2}$

Postać ogólna prostej: $Ax + By + C = 0$

Odległość punktu (x_0, y_0) od prostej $Ax + By + C = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Funkcja kwadratowa

postać ogólna: $y = ax^2 + bx + c$

postać kanoniczna: $y = a(x-p)^2 + q$

$p = \frac{-b}{2a}$, $q = \frac{-\Delta}{4a}$, $\Delta = b^2 - 4ac$

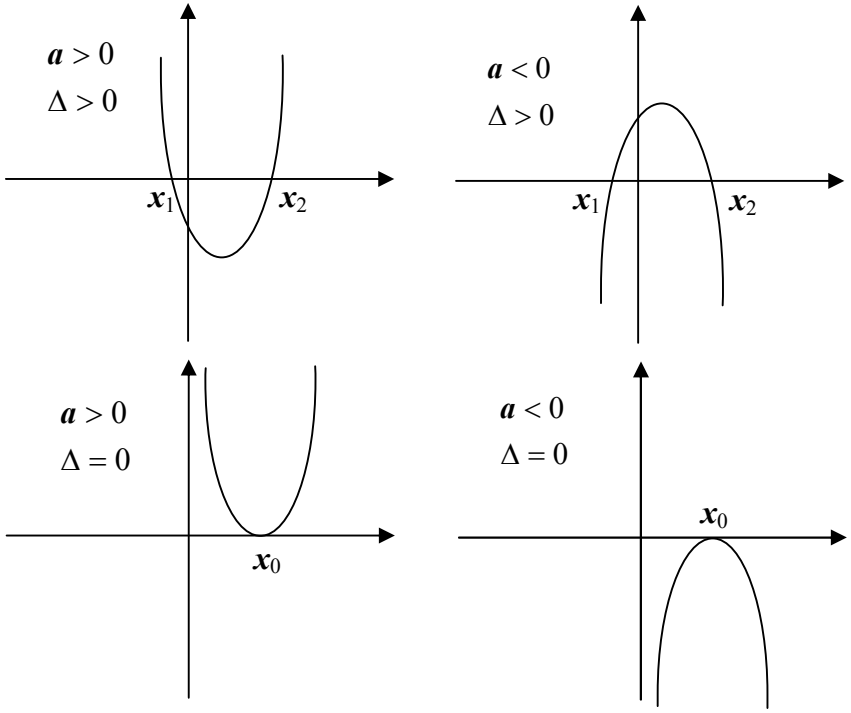
(p,q) – *współrzędne wierzchołka paraboli*

Δ – *wyróżnik funkcji kwadratowej*

postać iloczynowa, gdy $\Delta > 0$: $y = a(x-x_1)(x-x_2)$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

postać iloczynowa, gdy $\Delta = 0$: $y = a(x-x_0)^2$, $x_0 = \frac{-b}{2a}$



Cechy podobieństwa trójkątów

Cecha kk. Jeśli dwa kąty jednego trójkąta są równe dwóm kątom drugiego trójkąta, to trójkąty te są podobne.

Cecha bbb. Jeśli boki jednego trójkąta są proporcjonalne do boków drugiego trójkąta, to trójkąty te są podobne.

Cecha bkb. Jeśli dwa boki jednego trójkąta są proporcjonalne do dwóch boków drugiego trójkąta i kąty zawarte między tymi bokami są równe, to trójkąty te są podobne.

Wniosek: Gdy dwa trójkąty są podobne, to mają parami kąty równe i parami boki proporcjonalne *(stosunek długości boku jednego trójkąta do długości odpowiedniego boku drugiego trójkąta jest stały)*.

Wzór sinusów i cosinusów

Twierdzenie sinusów. W każdym trójkącie stosunek długości dowolnego boku trójkąta do sinusa przeciwległego kąta jest równy średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

Twierdzenie cosinusów. W dowolnym trójkącie zachodzą wzory

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

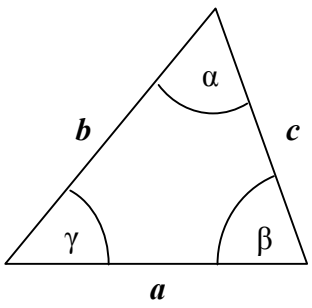
Przekształcając powyższe wzory można obliczyć **cos** kąta trójkąta

np. $\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

Trójkąt dowolny

Oznaczenia:

a, b, c – *długości boków trójkąta*
α, β, γ – *kąty trójkąta*
P_Δ – *pole trójkąta*
r – *promień okręgu* ***wpisanego***
R – *promień okręgu* ***opisanego***
h_a – *wysokość opuszczona na bok* ***a***
p – *połowa obwodu trójkąta*



$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \qquad p = \frac{a+b+c}{2} \text{ – połowa obwodu}$$

Długości boków trójkąta spełniają nierówności:

$$a + b > c \quad \text{i} \quad a + c > b \quad \text{i} \quad b + c > a$$

Wzory na **pole** trójkąta:

$$P_\Delta = \frac{1}{2} a h_a \qquad P_\Delta = \frac{1}{2} ab \sin\gamma \qquad P_\Delta = \frac{abc}{4R} \qquad P_\Delta = rp$$

$$P_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad P_\Delta = 2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$$

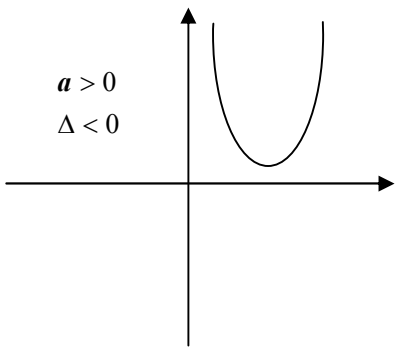
Promień koła **wpisanego** w trójkąt i **opisanego** na trójkącie:

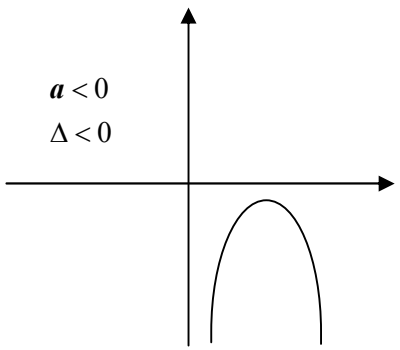
$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} = \frac{P_\Delta}{p}$$

środek okręgu **wpisanego** w trójkąt leży na przecięciu się dwusiecznych kątów trójkąta

$$R = \frac{abc}{4rp} = \frac{abc}{4P_\Delta}$$

środek okręgu **opisanego** na trójkącie leży na przecięciu się symetralnych boków trójkąta





Równanie kwadratowe

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \Delta = b^2 - 4ac$$

gdy $\Delta > 0$ są **dwa** rozwiązania: $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

gdy $\Delta = 0$ jest **jedno** rozwiązanie: $x_0 = \frac{-b}{2a}$

gdy $\Delta < 0$ równanie **nie ma** rozwiązania rzeczywistego

Wzory Viete'a

Gdy $\Delta > 0$, to: $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ $\qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

x_1 i x_2 są tego samego znaku, gdy: $x_1 \cdot x_2 > 0$

x_1 i x_2 są różnych znaków, gdy: $x_1 \cdot x_2 < 0$

x_1 i x_2 są oba dodatnie, gdy: $x_1 \cdot x_2 > 0$ i $x_1 + x_2 > 0$

x_1 i x_2 są oba ujemne, gdy: $x_1 \cdot x_2 > 0$ i $x_1 + x_2 < 0$

Metoda wyznacznikowa rozwiązywania ukł. równań lin.

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

$$W = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$ – *wyznacznik główny*

$$W_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 b_2 - c_2 b_1$$

$$W_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 c_2 - a_2 c_1$$

Układ ma **jedno** rozwiązanie, gdy $W \neq 0$ i wtedy:

$$x = \frac{W_x}{W} \qquad y = \frac{W_y}{W}.$$

Układ **nie ma** rozwiązania, gdy $W = 0$ i ($W_x \neq 0$ lub $W_y \neq 0$).

Układ ma **nieskończenie wiele** rozwiązań, gdy $W = 0$ i $W_x = 0$ i $W_y = 0$.

Równanie okręgu

<u>postać kanoniczna</u>: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

$S = (a,b)$ – *współrzędne środka okręgu*

r – *promień okręgu*

<u>postać ogólna</u>: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

$r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$

Ciąg arytmetyczny

$a_{n+1} = a_n + r$ czyli $a_{n+1} - a_n = r$ r – *różnica ciągu arytm.*

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$ – *wzór na **n**-ty wyraz ciągu arytm.*

$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ – *suma **n** pierwszych wyrazów ciągu*

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ $S_n = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot r}{2} \cdot n$

Trzy liczby x, y, z tworzą ciąg arytmetyczny, gdy $x + z = 2y$.

Ciąg geometryczny

$a_{n+1} = a_n \cdot q$ czyli $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ q – *iloraz ciągu geom.*

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ – *wzór na **n**-ty wyraz ciągu geometrycznego*

$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ dla $q \neq 1$

$S_n = a_1 \cdot n$ dla $q = 1$

$S = a_1 + a_2 + ...$ – *suma wszystkich wyrazów ciągu geom.*

$S = \frac{a_1}{1-q}$, gdy $|q| < 1$ $(q \in (-1,1))$

Trzy liczby x, y, z tworzą ciąg geometryczny, gdy $x \cdot z = y^2$.

Monotoniczność ciągu

Ciąg jest **rosnący**, gdy: $a_{n+1} > a_n$ czyli $a_{n+1} - a_n > 0$

Ciąg jest **malejący**, gdy: $a_{n+1} < a_n$ czyli $a_{n+1} - a_n < 0$

Pochodna - różniczka

Definicja. Niech f będzie funkcją określoną w pewnym otoczeniu punktu x_0. Jeżeli istnieje granica właściwa $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, to granicę tę nazywamy pochodną funkcji f w punkcie x_0. Ozn. $f'(x_0)$.

Wzory:

$$[f(x)+g(x)]'=f'(x)+g'(x)$$

$$[f(x)-g(x)]'=f'(x)-g'(x)$$

$$[a\cdot f(x)]'=a\cdot f'(x)\quad,\quad \text{gdzie } a\in R$$

$$[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}\quad,\quad \text{gdy } g(x)\neq 0$$

Pochodne niektórych funkcji:

$(c)'=0$	c – *stała*	$(\sin x)'=\cos x$
$(ax+b)'=a$		$(\cos x)'=-\sin x$
$(x^n)'=n\cdot x^{n-1}$	$n\in R$	$(\mathrm{tg}\,x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$
$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x\in R_+$	$(\mathrm{ctg}\,x)'=\frac{-1}{\sin^2 x}$
$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$	$x\neq 0$	

Równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie x_0:

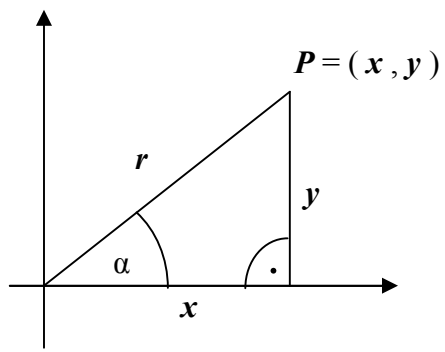
$$y=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)$$

Definicje funkcji trygonometrycznych

$\sin\alpha=\frac{y}{r}$, $\cos\alpha=\frac{x}{r}$

$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{y}{x}$, $x\neq 0$

$\mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{x}{y}$, $y\neq 0$



*W **I** ćwiartce wszystkie funkcje są dodatnie, w **II** tylko sinus, w **III** tangens i cotangens, a w **IV** cosinus.*

Podstawowe tożsamości i wzory trygonometryczne

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ $\quad \mathrm{tg}\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\quad \mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha=1$ lub $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{1}{\mathrm{ctg}\,\alpha}$ lub $\mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}\qquad \mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\beta}{1+\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$$

$$\mathrm{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta-1}{\mathrm{ctg}\,\beta+\mathrm{ctg}\,\alpha}\qquad \mathrm{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta+1}{\mathrm{ctg}\,\beta-\mathrm{ctg}\,\alpha}$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\qquad\left(=\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}\right)$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\qquad\left(=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha=\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}\right)$$

$$\mathbf{tg}\,2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\,\mathbf{tg}\,\alpha}{1-\mathbf{tg}^2\,\alpha} = \frac{2}{\mathbf{ctg}\,\alpha - \mathbf{tg}\,\alpha}$$

$$\mathbf{ctg}\,2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\mathbf{ctg}^2\,\alpha - 1}{2\,\mathbf{ctg}\,\alpha} = \frac{\mathbf{ctg}\,\alpha - \mathbf{tg}\,\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Wartości funkcji trygonometrycznych wybranych kątów

kąt α		$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$
stopnie	radiany				
0°	0	0	1	0	–
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	–	0

$\pi = 180°$ $\qquad$ $2\pi = 360°$

Podstawowe wzory redukcyjne

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ $\qquad$ $\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ $\qquad$ $\mathrm{ctg}(-\alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$

$\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha$ $\qquad$ $\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$

$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ $\qquad$ $\mathrm{tg}(180° - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$

$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$ $\qquad$ $\mathrm{ctg}(180° - \alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$

$\sin(\alpha + k\cdot 360°) = \sin\alpha$ $\qquad$ $\mathrm{tg}(\alpha + k\cdot 180°) = \mathrm{tg}\,\alpha$

$\cos(\alpha + k\cdot 360°) = \cos\alpha$ $\qquad$ $\mathrm{ctg}(\alpha + k\cdot 180°) = \mathrm{ctg}\,\alpha$

Rozwiązania prostych równań trygonometrycznych

$\sin x = c$: $\quad c \in \langle -1,1 \rangle \quad x = x_0 + 2k\pi$ lub $x = (\pi - x_0) + 2k\pi$

(dla $c < 0$: $x_0 = -\alpha$)

$\cos x = c$: $\quad c \in \langle -1,1 \rangle \quad x = x_0 + 2k\pi$ lub $x = -x_0 + 2k\pi$

(dla $c < 0$: $x_0 = \pi - \alpha$)

$\mathrm{tg}\,x = c$: $\quad x = x_0 + k\pi \quad$ (dla $c < 0$: $x_0 = -\alpha$)

$\mathrm{ctg}\,x = c$: $\quad x = x_0 + k\pi \quad$ (dla $c < 0$: $x_0 = -\alpha$)

Logarytmy

$$\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y \qquad x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$$

$\log_a 1 = 0$ $\qquad$ $\log_a a = 1$ $\qquad$ $c = \log_a a^c$

$\log_a (x\cdot y) = \log_a x + \log_a y$ $\qquad$ $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

$$n\cdot\log_a x = \log_a x^n$$